

WISSENSCHAFT UND TECHNIK



G. N. BERMANN

WIE DIE MENSCHEN ZÄHLEN LERNTEN

WIE DIE MENSCHEN ZÄHLEN LERNTEN Quelle

EINLEITUNG

Was ist einfacher als Rechnen? Der Reihe nach aufzuzählen: eins, zwei, drei, vier, fünf usw., lernt zumindest jeder Mensch. Rechnen ist in unserem Leben so fest verwurzelt, daß wir uns einen erwachsenen Menschen, der nicht rechnen kann, gar nicht vorstellen können. Und doch gab es Zeiten, da die Menschen nicht einmal zählen konnten. Unsere Vorfahren, die die Erde vor langer, langer Zeit bewohnten, kannten weder das Feuer noch Zahlen.

In den Sagen unserer Vorfahren werden Propheten und Helden erwähnt, durch die die Götter der Menschheit Feuer und Zahl offenbart haben sollten, oder die selbst den Göttern diese Erkenntnisse entrissen hätten. Solche Propheten und Helden, wie überhaupt Götter hat es selbstverständlich nie gegeben, sondern der Mensch lernte das Rechnen allmählich im Laufe der Zeit, seine Erfahrungen von Generation zu Generation vermittelnd.

Unsere heutige Mathematik, jene Wissenschaft, von der Friedrich Engels sagte: „Die reine Mathematik hat zum Gegenstand die Baumformen und Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt also einen sehr realen Stoff ist keine nutzlose Erfindung kluger Leute. Sie entstand aus dem praktischen Bedürfnis der Menschen, die sie umgebende Natur und deren Gesetze zu erkennen, um sie der Menschheit nutzbar zu machen.“

Wesentlich beteiligt an der Entwicklung der Mathematik waren die großen russischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts, *N. I. Lobatschewski*, *P. I. Tschebascher*, *S. W. Kowalfwskaja* und andere. Einen glänzenden Aufschwung nahm dann die Mathematik in der Sowjetunion. Sowjetische Mathematiker haben Licht nur schwierigste Gebiete der Mathematik durch neue, bedeutende Untersuchungsergebnisse bereichert, sondern darüber hinaus auch eine Reihe für die Entwicklung der Volkswirtschaft wichtiger wissenschaftlicher Aufgaben gelöst. Die Arbeiten vieler sowjetischer Mathematiker wurden durch die Verleihung von Stalinpreisen gewürdigt. So z. B. die hervorragenden Arbeiten des Helden der Sozialistischen Arbeit *I. M. Winogradow* auf dem Gebiete der Zahlentheorie.

In den kapitalistischen Ländern dienen die Forschungen auch auf dem Gebiete der Mathematik der Vorbereitung eines neuen Krieges, der Entwicklung neuer, wirkungsvollerer Massenvernichtungsmittel. Dies stößt, wie wir wissen, auf den Protest aller anständigen, fortschrittlichen Gelehrten. Die Presse meldete daß ein großer englischer Wissenschaftler die Weiterarbeit an den neuesten Rechenmaschinen abgelehnt hat, weil man diese Maschinen, die automatisch und außerordentlich schnell die kompliziertesten Berechnungen ausführen können, zur Vorausbestimmung eines Raketengeschößeinschlages auf friedliche Wohnstädte mißbrauchen wollte.

In der Sowjetunion ist dagegen die Mathematik - wie auch jede andere Wissenschaft - dem Ziel: Aufbau der kommunistischen Gesellschaftsordnung und damit der Steigerung des Wohlstandes der Menschen untergeordnet.

DAS RECHNEN IN GRAUER VORZEIT

In den Grabmälern des Altertums, in den Ruinen alter Tempel fand man seltsame, wunderliche Schriftzeichen. Wissenschaftler vermochten sie zu entziffern, und wir erfahren, wie die Menschen vor vier bis fünftausend Jahren gelebt haben. Diesen Aufzeichnungen entnehmen wir, daß unsere Vorfahren schon damals das Rechnen mit Zahlen kannten. Wie es aber war, als die Menschen noch nicht schreiben konnten, können wir lediglich vermuten. Drei Möglichkeiten gibt es zur Lösung dieser Rätsel.

Die erste - Studium der Sprache, der nationalen Überlieferung, der Lieder. Die Sprache birgt viele Spuren jener Zeiten, da die Menschen noch nicht schreiben konnten.

Die zweite - Beobachtungen an Kindern, wenn sie sprechen und zählen lernen. Durch das Studium der Kindheitsentwicklung gewinnt man nämlich Hinweise darauf, wie die Menschen ganz allgemein das Zählen lernten: das Kind „wiederholt“ sozusagen einige Schritte der Menschheitsentwicklung.

Die dritte - Studium der Urvölker. In Afrika, im zentralen Südamerika und auf einigen Inseln haben sich Völkerstämme erhalten, die auf einer sehr niedrigen Entwicklungsstufe stehengeblieben sind, etwa der unserer Vorfahren vor fünf- bis zehntausend Jahren. Die kapitalistischen Herren sind aber nicht daran interessiert, das kulturelle Niveau dieser Kolonien zu heben. Deshalb hat sich hier und dort bis auf den heutigen Tag ein urzeitlicher Lebenszustand erhalten. Das Studium solcher Stämme, ihrer Sprachen und ihrer Kunst ermöglichte die Aufklärung vieler Rätsel unserer eigenen Vorgeschichte. Vergleichen wir die Erkenntnisse aus diesen drei Quellen, dann können wir ein angenähertes Bild davon gewinnen, wie unsere Vorfahren vor der Erfindung der Schrift rechneten.

Zu einer Zeit, als die Menschen gerade das Sprechen: und den Gebrauch des Feuers erlernt hatten, kannten sie nur zwei Zahlen: eins und zwei. Handelte es sich um mehr als zwei Gegenstände, sagten die Menschen einfach „viele“.

Quelle **G. N. Berman, „Wie die Menschen zählen lernten“; Wissenschaft und Technik verständlich dargestellt- Reihe Naturwissenschaften Band 19; Aufbau-Verlag Berlin 1953**

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

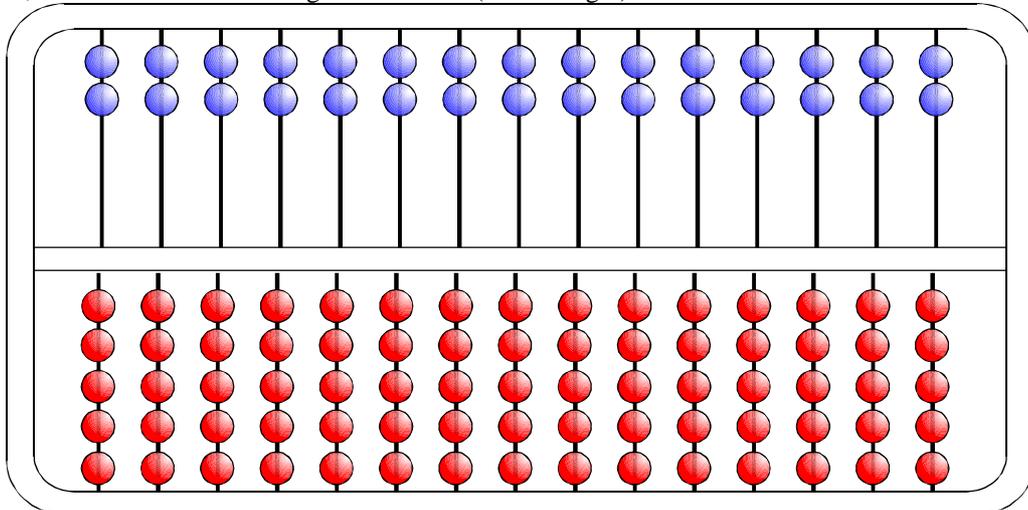
Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

„Viele“ Sterne standen am Himmel aber auch an der Hand waren „viele“ Finger. Noch heute sind Stämme bekannt, für die das Zählen bis drei eine schwierige Sache ist. In der Entwicklung jedes Kindes kennt man gleichfalls einen Zeitabschnitt, in dem es die Bedeutung von „eins“ und „zwei“ begreift, bis „drei“ aber noch nicht zählen kann.

Allmählich fügten sich zu den ersten beiden Zahlen neue hinzu. Die Menschen lernten bis fünf zählen und zwei „Fünfer“ zu einem „Zehner“ zu vereinigen. Dabei half eine Rechenmaschine, mit der die Natur den Menschen selbst ausgestattet hat - seine Hände mit den zehn Fingern.

Die Zahlen Fünf und Zehn spielten in der Entwicklungsgeschichte des Rechnens eine gewaltige Rolle. Dafür gibt es viele Hinweise. In der Mehrzahl der alten Sprachen stimmt die Bezeichnung der ersten zehn Zahlen mit der Bezeichnung der Finger an den Händen überein. Selbst die Sprachen jetzt lebender Völker weisen noch Spuren dieser Tatsache auf. In der heutigen italienischen Sprache z. B. bedeutet „le dita“ sowohl „die Zahlen bis zehn“, als auch „die Finger“. Der Ausdruck „von den Fingern abzählen“, der sich in unserer Sprache erhalten hat, zeigt, daß auch bei unseren Vorfahren das Zählen untrennbar mit den Fingern verbunden war. Und schließlich dient auch unser gegenwärtiges Zehnersystem, über das im folgenden noch ausführlich berichtet werden soll, als Beweis dafür.

Wir sagten, daß die Menschen anfangs mit „Fünfern“ zählten, dann aber schon lernten „Fünfer“ zu Paaren zu vereinigen und mit „Zehnern“ zu zählen. Darauf weist ein interessantes Rechengesetz hin, das Chinesische Rechenbrett, das sich bis in unsere Tage erhalten hat (Abbildung 1).



Als sich mit der menschlichen Gesellschaft der Ackerbau, die Viehzucht und die primitivsten Handwerke entwickelten, bildeten sich auch die einfachsten Formen des Rechnens heraus. Aus diesen Zeiten blieben schriftliche Dokumente erhalten, denen wir entnehmen können, wie unsere Vorfahren damals gerechnet haben.

Noch kannte man nicht die Buchstabenschrift; Jedes Ding, jede Tätigkeit wurde durch ein Bild dargestellt. Diese Abbildungen vereinfachten sich mit der Zeit, ihre Zahl wuchs allerdings. Besondere Zeichen stellten dann nicht nur Gegenstände und Handlungen dar, sondern auch Eigenschaften der Dinge. Alle diese Zeichen waren sehr kompliziert und bezeichneten also nicht einzelne Laute, sondern ganze Worte.

Derartige Zeichen nennt man Hieroglyphen. Die Hieroglyphenschrift existiert seit mehr als fünftausend Jahren. In Abbildung 2 sehen wir Hieroglyphen, wie sie auf einem der ältesten ägyptischen Bauwerke zu finden sind.

Besondere Zeichen (Ziffern) zur Niederschrift von Zahlen gab es allerdings noch nicht. Eins, fünf, zwanzig und andere Zahlwörter wurden durch bestimmte Hieroglyphen dargestellt, von denen es verhältnismäßig wenig gab, da man zu jener Zeit nicht weiter als bis hundert, in seltenen Fällen bis tausend zählte.

In einigen Ländern, so z. B. in China und in Japan, werden auch heute noch Hieroglyphen gebraucht. Die Abbildung 3 zeigt chinesische und japanische Briefmarken, auf denen neben gewöhnlichen Ziffern und lateinischen Buchstaben derartige Hieroglyphen zu sehen sind.

Aus den Hieroglyphen der alten Ägypter erkennen wir, daß die Rechenkunst bei ihnen einen hohen Stand erreicht hatte. Vor dreieinhalbtausend Jahren unterschieden die Ägypter bereits ganze und gebrochene Zahlen. Denn aus dieser Zeit sind Kalenderberechnungen, kaufmännische Dokumente und Sammelwerke arithmetischer Aufgaben, sicherlich Lehrbücher für den Rechenunterricht, erhalten geblieben. Große Zahlen finden wir jedoch in diesen ägyptischen Aufzeichnungen noch nicht.

Für die weitere Vervollkommnung des Rechnens war es notwendig, entweder zu einer geeigneteren Schrift überzugehen, d. h. von Hieroglyphen zu Buchstaben, oder aber ein neues Verfahren zu entwickeln, das das Schreiben der Zahlen durch Spezialzeichen erleichterte. Manche Völker beschränkten den ersten, andere den zweiten Weg.

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

WIE MAN LERNT, BUCHSTABEN ZUM SCHREIBEN DER ZAHLEN ZU BENUTZEN

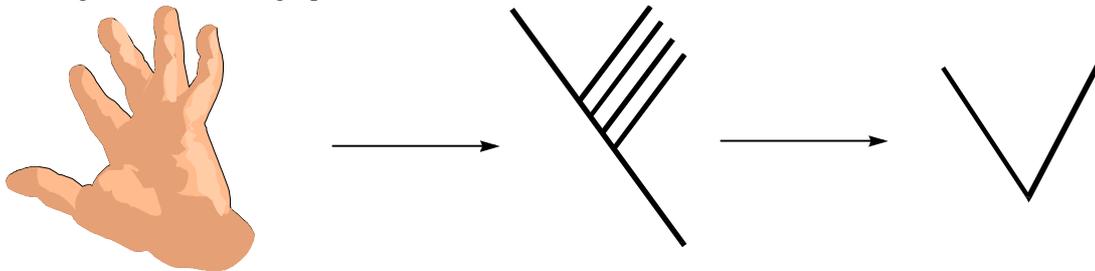
Die Erfindung der Buchstaben trug viel zur Entwicklung der Kultur bei. Sie förderte auch die Entwicklung des Rechnens. Abgesehen davon, daß man mit Hilfe der Buchstaben die Namen der Zahlen auch schreiben konnte, wie sie gesprochen wurden, begann man außerdem jede Zahl mit Hilfe eines besonderen Buchstabens darzustellen. Dabei gab es jedoch eine Schwierigkeit: Buchstaben gab es nur wenige, Zahlen aber sehr viel (zur Zeit der Erfindung der Buchstaben zählten die Menschen schon bis tausend). Das heißt, es war außer der Möglichkeit, die Zahlen durch Buchstaben darzustellen, auch noch die Erfindung einer Methode erforderlich, die mit wenigen Buchstaben das Schreiben vieler verschiedener Zahlen gestattete. Ein System also, in dem wenige Zeichen zur Darstellung vieler Zahlen genügen.

Besonders interessant sind für uns das römische und das Slawische System; das römische, weil römische Zahlen auch heute noch auf Uhren und an alten Baulichkeiten zu finden sind und zur Bezeichnung von Buchabschnitten, Jahrhunderten usw. verwendet werden, und das slawische, weil es im alten Rußland gebraucht wurde.

Die alten Römer bedienten sich im Verlaufe vieler Jahre zunächst altertümlicher Zeichen, deren Ursprung noch nicht endgültig ermittelt werden konnte. Hier diese Zeichen:

I V X ↓)(
eins fünf zehn fünfzig hundert

Es ist anzunehmen, daß das Zeichen für „eins“ die einen Finger darstellende Hieroglyphe, das Zeichen für „fünf“ die Darstellung der Hand mit abgespreiztem Daumen ist,



während für „zehn“ „zweimal fünf“ verwendet wurde:

V V **oder** V V → X

Eine Erklärung für die Entstehung der Zeichen für fünfzig und hundert ist nicht so einfach. Über diese Frage stellten die Forscher voneinander abweichende Behauptungen auf.

In der Zeit der höchsten Blüte der römischen Kultur (vor zweitausend Jahren) wurden diese Zeichen aber durch ihnen ähnliche lateinische Buchstaben ersetzt,

I (Finger) verwandelte sich in das lateinische **I**
V (Hand) in das lateinische **V**,
X (zwei Hände) in das lateinische **X**,
↓ in das lateinische **D**
) () in das lateinische **C**.

Von dem letzten Zeichen blieb also nur die rechte Klammer übrig.

Außerdem erschienen zwei neue Zeichen: Der Buchstabe D für fünfhundert, und der Buchstabe M für tausend. Denkbar ist, daß die Buchstaben C und M die Anfangsbuchstaben der Wörter „centum“ und „mille“ sind, die ja „hundert“ und „tausend“ bedeuten.

Wie schrieben nun aber die Römer die verschiedenen Zahlen? Um die Zahlen Zwei und Drei zu schreiben, wiederholten sie zwei- bzw. dreimal das Zeichen für „eins“: II (zwei), III (drei). „vier“ schrieben sie so: IV; die vor der Fünf stehende Eins ist also von fünf abzuziehen. Umgekehrt werden hinter der Fünf stehende Einheiten dieser zugezählt; „sechs“, „sieben“ und „acht“ schrieb man daher: VI, VII, VIII.

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

Weiter wurde das Zeichen X benutzt. „Neun“ schrieb man: IX (wiederum wird die vorangestellte Eins von der nachfolgenden Zahl, hier der Zehn, abgezogen). Es folgten X, XI, XII, XIII (zehn, elf, zwölf, dreizehn). Als „vierzehn“ erschien: XIV (zehn und vier), „fünfzehn“ schrieb man: XV (zehn und fünf), usf.; „zwanzig“ und „dreißig“ wurden durch Wiederholungen des Zehnerzeichens dargestellt: XX und XXX.

Für „vierzig“, „fünfzig“ usw. wurde das Zeichen L (fünfzig) verwendet. „Einundvierzig“ beispielsweise sah so aus: XLI (die Zehn vor der Fünfzig wird von dieser abgezogen, die Eins hinter ihr zur Fünfzig zugezählt). „Fünfzig“, „sechzig“ und „siebzig“ schrieb man: L, LX, LXX. Für „neunzig“ benutzte man das Zeichen C in folgender Weise: Von hundert ist zehn abzuziehen, d. h. das Zehnerzeichen ist vor das Hundertzeichen zu setzen: XC.

Alle Zahlen des ersten Hunderts in römischen Ziffern zeigt die Tabelle auf Seite 6.

Die auf hundert folgenden Zahlen wurden mit römischen Ziffern nach demselben System geschrieben. Die Zahl 102 CII, die Zahl 374 CCCLXXIV usw. Für Zahlen von vierhundert bis achthundertneundneunzig verwandte man das Zeichen D (fünfhundert), schrieb für neunhundert: CM, und für tausend: M. Die Zahl 1917 wird in römischen Ziffern also folgendermaßen ausgedrückt: MCMXVII, und 1952: MCMLII.

Auch große Zahlen sind mit römischen Ziffern verhältnismäßig einfach zu schreiben; die Zahl 123 849 beispielsweise so: CXXIII_m DCCCXLIX. Das kleine lateinische m kennzeichnet hier die Tausender (einhundertdreißigtausend); mit diesem Buchstaben beginnt, wie wir bereits wissen, das lateinische Wort mille = tausend.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXV	XXVI	XXVII	XXVIII	XXIX	XXX
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
XXXI	XXXII	XXXIII	XXXIV	XXXV	XXXVI	XXXVII	XXXVIII	XXXIX	XL
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
XLI	XLII	XLIII	XLIV	XLV	XLVI	XLVII	XLVIII	XLIX	L
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
LI	LII	LIII	LIV	LV	LVI	LVII	LVIII	LIX	LX
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
LXI	LXII	LXIII	LXIV	LXV	LXVI	LXVII	LXVIII	LXIX	LXX
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
LXXI	LXXII	LXXIII	LXXIV	LXXV	LXXVI	LXXVII	LXXVIII	LXXIX	LXXX
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
LXXXI	LXXXII	LXXXIII	LXXXIV	LXXXV	LXXXVI	LXXXVII	LXXXVIII	LXXXIX	XC
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
XCI	XCII	XCIII	XCIV	XCV	XCVI	XCVII	XCVIII	IC	C
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabelle 1: Römische Zahlen bis 100

Das römische System ist demnach zum Schreiben von Zahlen geeignet, nicht aber für die Durchführung von Berechnungen; eine schriftliche Rechenarbeit (Rechnen in Kolonnen und andere Verfahren, die wir anzuwenden gewohnt sind) ist mit römischen Zahlen fast unmöglich. Das ist der große Mangel des römischen Systems.

Das slawische System verwendet dagegen nicht sieben, sondern siebenundzwanzig Buchstaben. Dafür aber erlaubt es sowohl das Schreiben sehr großer Zahlen als auch die Durchführung von Berechnungen in Kolonnen, wie wir es kennen.

Im Gegensatz zum römischen benutzt das slawische System nicht große, sondern kleine Buchstaben. Über die Zahlen darstellenden Buchstaben wurde zur Unterscheidung ein besonderes Zeichen gesetzt: **Ѧ**

Es ist das sogenannte "Titlo" der kirchenslawischen Schrift, üblicherweise sonst als Abkürzungszeichen verwendet.

Im folgenden die slawischen Ziffern (unter die Zeichen sind die Namen der Buchstaben des slawischen Alphabets gesetzt):

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

ā	ḃ	ḡ	ā	ē	š	š	h̄	ā
as	bedi	glagol	dobro	ješt	selo	semlja	dshe	fite
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ī	ḡ	ā	ḡ	h̄	š	ō	ḡ	č
10	kako	ljudi	myšlete	nasch	kbi	on	pokoj	tschere
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ḡ	č	ī	ī	ḡ	š	š	ō	č
rzy	slowo	twerdo	uk	fert	cha	pbi	o	zy
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Die Zahlen Elf und Zwölf beispielsweise wurden so geschrieben: **āi. ḃi.**, die Zahlen Einundzwanzig und Zweiundzwanzig so: **īā. ḃi.**, usw. Das „Titlo“ wurde nur über einen der Ziffer-Buchstaben gesetzt. Die Reihenfolge der Ziffern war gleich ihrer Aussprache, wie sie im Russischen erhalten blieb. So sagt man z. B. russisch *n-q l` du` q* (pjatnadzjatj = fünfzehn, kirchenslawisch *n-q l` dep~q ſ*) und schrieb in alten Zeiten auch: **ēi**; im Gegensatz dazu werden im russischen „*db` du` q { q oh*“ (dwadzjatj- tri = zwanzig drei für dreiundzwanzig) zuerst die Zehner genannt und dann die Einer - im Kirchenslawisch spiegelt sich das auch in der Schrift wider: man schrieb **ḃi.**

Der Platz der Ziffer, ihre Stellung in der Zahl hatte also keine Bedeutung, während bei der uns geläufigen Schreibweise dieselbe Ziffer in Abhängigkeit von ihrer Stellung verschiedene Zahlen darstellen kann. So bezeichnet die Ziffer 2 in den Zahlen 12, 23, und 215 das einmal zwei, das zweitemal zwanzig und das drittemal zweihundert.

Das Zeichen **×** bedeutet im slawischen System tausend. Mit Hilfe von Wiederholungen dieses Zeichens war es möglich, auch verhältnismäßig große Zahlen zu schreiben. Die Zahl 2 178 073 zum Beispiel konnte man so darstellen:

× × ḃ × ḡ on ō ḡ

Um das Jahr 900 waren allerdings in Rußland größere Zahlen mit Tausendern noch unbekannt. Die Benennung der Zahlen ist jedoch bis auf den heutigen Tag fast dieselbe geblieben, nur die Aussprache hat sich etwas geändert. Zehntausend erschien den alten Slawen als eine so gewaltige Zahl, daß sie dafür das Wort „*q yk`*“ (tma = Unmenge) gebrauchten. Dasselbe Wort bezeichnete aber auch eine unendlich große Anzahl. Es ist sehr interessant, daß auch bei den alten Griechen die größte Zahl, für die sie noch eine besondere Benennung hatten, Zehntausend war. Griechisch hieß zehntausend „myria“, und das Wort „myria“ drückte, ähnlich dem slawischen „*q yk`*“ (tma), nicht nur Zehntausende, sondern auch irgendeine riesige, unzählbare Menge aus. Noch heute spricht man von „Myriaden von Sternen“.

In Rußland begann der Gebrauch der jetzigen „arabischen“ Ziffern im 15. und 16. Jahrhundert (in Deutschland gleichfalls im 15. Jahrhundert). Gleichzeitig entwickelte sich auch das slawische System, und man fand Benennungen für immer größere Zahlen.

Im 17. Jahrhundert entwickelte sich aus dem slawischen System etwas Besonderes; genannt die „große slowenische Zahl“; dies System wurde, wie ein altes Handbuch sagt, dann angewandt, „wenn eine große Zählung notwendig war“, und sah Folgendermaßen aus:

Zehntausend hieß nicht mehr „Unmenge“, sondern bereits zehntausend, und das Wort „*q yk`*“ (tma) bezeichnete nunmehr „tausend Tausender“, das ist unsere Million. Außerdem erschienen folgende Bezeichnungen: „*q yk` q ek*“ (tma tem) oder „*j echml*“ (legion), jetzt also eine Million Millionen oder eine Trillion, „*j ec hml j echml mb*“ (legion legionow) oder „*j emdo*“ (leodr), und schließlich „*j emdo j emdomb*“ (leodr leodrow) oder „*bmoml*“ (woron).

In einer Handschrift wird noch die Bezeichnung „*j mj md`*“ (koloda) erwähnt für zehn Woron, mit der Bemerkung, daß es unter allen Zahlen keine größere gäbe.

DIE ENTSTEHUNG DES JETZIGEN POSITIONS- ODER STELLENWERTSYSTEMS

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

Wir sahen, daß manche Völker die Buchstaben nicht nur zum Schreiben von Wörtern, sondern auch zur Darstellung von Zahlen gebrauchten. Andere Völker schrieben die Zahlen mit Hilfe von hieroglyphenartigen Zeichen, überlegten dafür aber, wie man mit wenigen Zeichen eine große Anzahl von Zahlen schreiben kann.

Eine besonders interessante Methode entstand im alten Babylon. Die Babylonier schrieben mit Stäbchen (Griffeln) auf Tafeln aus weichem Ton und brannten dann diese Handschriften. So entstanden feste „Ziegel-Dokumente“; viele davon erhielten sich bis in unsere Zeit. Forscher fanden bei Ausgrabungen viele derartige „Ziegel-Akten“, Staats- und Manadelsverträge, und auch Lehrbücher, so daß uns das Leben im alten Babylon sehr gut bekannt geworden ist.

Die erwähnte Methode führte dazu, daß alle Hieroglyphenbilder der Babylonier aus schlanken vertikalen oder horizontalen keilförmigen Zeichen bestanden - etwa so: , oder so: . Deshalb erhielt die Schrift der alten Babylonier auch den Namen **Keilschrift**.

Die Forschungen ergaben:

Vor ungefähr viertausend Jahren kamen nach Mesopotamien - dem Tal zwischen den Flüssen Euphrat und Tigris auf dem Territorium des heutigen Irak - zwei Nomadenvölker: die Sumerer und die Akkader. Das waren für ihre Zeit hochentwickelte Völker. Sie verstanden den Boden zu pflügen und Vieh zu züchten kannten Handwerk und Handel. Innerhalb von zwei Jahrhunderten vereinigten sie sich zu einem mächtigen Staat - Babylonien.

Zur Zeit ihrer Verschmelzung hatten beide Völker - die Sumerer wie die Akkader - eigene Gewichts- und Münzeinheiten. Die Grundeinheit des Gewichts war bei den Sumerern die „Mina“, nach unserem Gewicht etwa $\frac{1}{2}$ kg. Als Münzeinheit diente ihnen die „Mina Silber“. Die Einheiten der Akkader waren kleiner: Ihre Gewichtseinheit, ein „Schekel“, war ungefähr ein Sechzigstel der „Mina“. Nach dem Zusammenschluß waren beide Gewichtseinheiten im Gebrauch, wie in der ersten Zeit nach der Oktoberrevolution in der UdSSR das Pfund neben dem Kilogramm.

Im Geldumlauf spielten die Mina Silber und der Schekel etwa die Rolle des Rubels und der Kopeke, nur war der Schekel nicht der hundertste, sondern eben nur der sechzigste Teil der höheren Einheit.

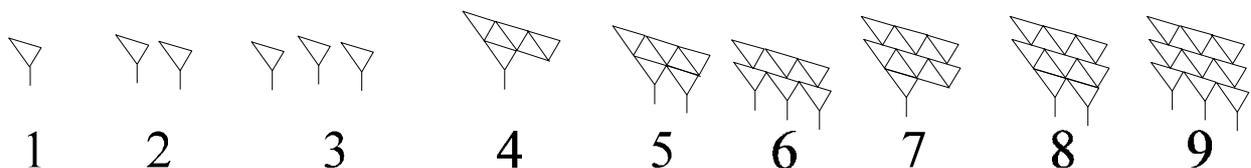
Handel und Wirtschaft gediehen, die Umsätze stiegen. Wie bei uns außer dem Gramm und dem Kilogramm die Tonne erforderlich wurde, so machte sich auch in Babylon die Einführung einer größeren Gewichtseinheit notwendig.

Natürlich wählte man die neue Gewichtseinheit sechzigmal so groß wie die Mina, denn an die Zahl sechzig hatte man sich bei den Berechnungen bereits gewöhnt. Man nannte die größere Gewichtseinheit „Talent“.

So entstand auch eine entsprechende neue Geldeinheit, das „Talent Silber“, gleich sechzig Minen Silber.

Da die Babylonier nun drei Einheiten (in Gewicht und Münze) hatten, von denen jede gleich sechzig kleineren war, fiel es ihnen nicht ein, für eine größere Zahl als sechzig einen Namen zu suchen. Wie wir nicht sagen: „zweihundertfünfzehn Kopeken“ oder „eintausendsiebenunddreißig Gramm“ sondern: „zwei Rubel fünfzehn“ oder „ein Kilo siebenunddreißig Gramm“, so sagten die Babylonier: „zwei Minen vierzig Schekel“. Deshalb genügten ihnen zur Bezeichnung der Zahlen neunundfünfzig Zeichen.

Wir sagten schon, daß die babylonische Schrift aus Keilzeichen bestand. „Eins“ wurde durch ein senkrechttes Keilzeichen angedeutet, die Zahl Zwei durch zwei solcher Zeichen, usw. bis zu neun Keilstrichen. Die ersten neun Zahlen in babylonischen Zeichen waren:

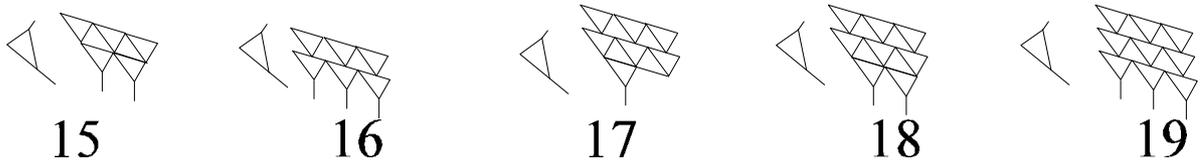
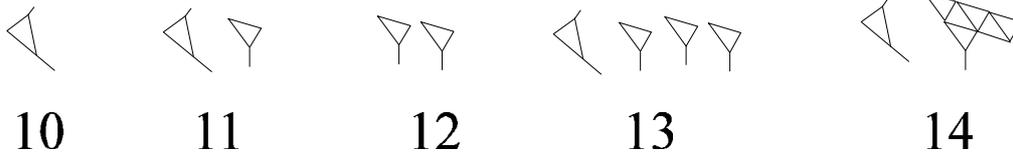


Die Keilzeichen sind also so angeordnet, daß man beim Lesen gar nicht zu zählen braucht: Ihre Anzahl fällt einem sofort ins Auge.

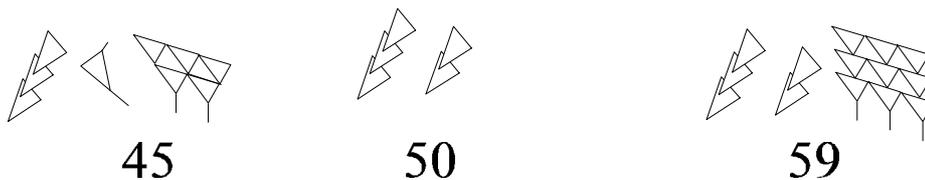
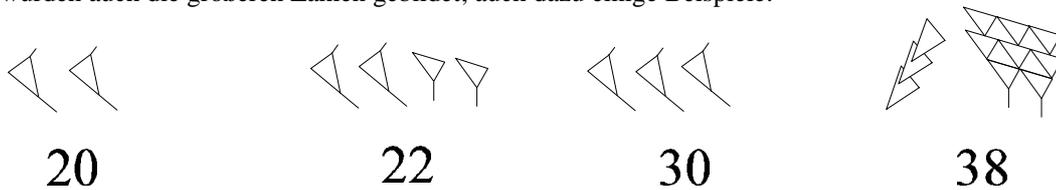
Für zehn gab es ein besonderes Zeichen einen breiten, querstehenden Keil. Mit ihm schrieb man die Zahlen von zehn bis neunzehn:

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)



Ähnlich wurden auch die größeren Zahlen gebildet; auch dazu einige Beispiele:



Anfangs wurden die Minen durch größere Zeichen von den Schekeln unterschieden. Viel später schrieb man alle Einheiten gleich, und nur die Lage (Stellung) des Zeichens ließ erkennen, welche Einheit es bezeichnete. Beispielsweise schrieb man 2 Talante, 13 Minen und 41 Schekel so:



Das Volk von Babylon entwickelte sich, die Ackerbauern benötigten einen Kalender, die Händler lernten das Meer zu befahren. Kalender und Schifffahrt setzten aber die Kenntnis der Himmelsbewegungen voraus. So entstand die Astronomie. Deren Entwicklung wiederum verlangte die Vervollkommnung des Rechnens. Man mußte immer größere Zahlen schreiben, wobei dann diese Zahlen nicht mehr Gewichte und Münzen, sondern auch andere Größen bezeichneten. Man lernte also die Zahl losgelöst von zu zählenden und zu messenden Gegenständen kennen. Solche Zahlen nennen wir abstrakte oder unbenannte Zahlen.

Zur Darstellung derartiger abstrakter Zahlen ersannen die Babylonier nun nicht etwa neue Zeichen, sondern sie benutzten die vorhandenen. Die Zahl



begann, neben einundzwanzig Minen und zweiundzwanzig Schekel allgemein zweiunddreißig Einheiten und noch einundzwanzig mal sechzig solcher Einheiten zu bedeuten. (In unserer Schreibweise also die Zahl 1292). Mit anderen Worten: Die linke Zeichen-Gruppe stellt einundzwanzig Einheiten zweiter Ordnung dar - und die rechte zweiunddreißig einfache Einheiten. Eine Einheit zweiter Ordnung ist das Sechzigfache der einfachen Einheit wie die Mina das Sechzigfache des Schekel. Es bezeichnet demnach



Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

dreizehn Einheiten zweiter, und dreizehn Einheiten erster Ordnung, d. h. auf unsere Art die Zahl 793; genau wie bei der Zahl „33“ die linke 3 drei Zehner, also drei Einheiten zweiter Ordnung bezeichnet, während die rechte 3 drei einfache Einheiten darstellt.

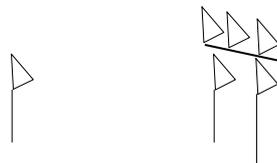
Ein Zahlensystem, bei dem sich die Bedeutung der Zahl in Abhängigkeit von ihrer Stellung ändert heißt ein Stellenwert- oder Positionssystem (nach dem lateinischen: *positio* = Lage).

Das Stellenwertsystem wurde, wie wir sehen, vor langem entwickelt. Auch wir verwenden ein System nach dem Positionsprinzip, jedoch bedeutet das links stehende Zeichen (Ziffer) bei uns das Zehnfache desselben Symbols rechts davon, während das Verhältnis bei den Babyloniern 60:1 war. Deshalb sagt man, daß bei uns das Zehnersystem (dekadische System) gebraucht wird, in Babylon aber das Sechzigersystem (Sexagesimalsystem) der Zahlen angewandt wurde. Das Stellenwertsystem ermöglichte den Babyloniern das Schreiben sehr großer Zahlen.

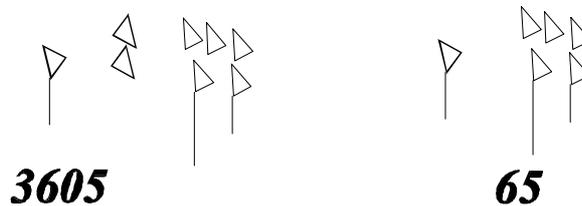
Lange Zeit besaßen die Babylonier allerdings kein unserer Null entsprechendes Zeichen. Die Zahl 65, bestehend aus einer Einheit zweiter Ordnung (60) und fünf einfachen Einheiten, schrieben sie so:



während sie bei der Zahl 3605 - die eine Einheit dritter Ordnung ($3600 = 60 \times 60$), überhaupt keine Einheit zweiter Ordnung und fünf einfache Einheiten enthält - den Platz für die fehlenden Einheiten zweiter Ordnung einfach frei ließen:

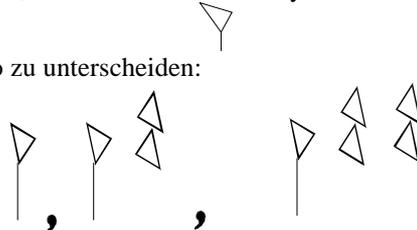


Beim Schreiben auf Tontafeln ergaben sich natürlich keine exakten Abstände. Das verursachte Verwirrung in Berechnungen und Dokumenten. Von irgendeinem Zeitpunkt ab erscheint dann auf den babylonischen Tautafeln ein neues Symbol, das Zeichen der Unterteilung: . Es entspricht unserer Null und zeigt an der Stelle, die es einnimmt, das völlige Fehlen von Einheiten dieser Ordnung an. Mit Hilfe dieses Zeichens konnten nunmehr die Zahlen 3605 und 65 klar unterschieden werden:



Interessant ist jedoch folgendes: Nach Einführung des Unterteilungszeichens im Zahleninnern kam den Babyloniern jedoch nicht der Gedanke, es auch an Stelle fehlender Einheiten irgendwelcher Ordnung am Zahlenende zu setzen. Die Zahlen 1, 60, 3600 schrieben die Babylonier alle gleich:

Sie kamen nicht darauf, sie einfach so zu unterscheiden:



Deshalb blieb auch nach der Erfindung des „Lückenzeichens“ in den Dokumenten der Babylonier einige Unklarheit bestehen.

Die Babylonier rechneten sowohl mit ganzen als auch mit einfachen gebrochenen Zahlen. Sie stellten eine Reihe mathematischer Tabellen, Lehrbücher und Aufgabensammlungen zusammen - wie wir wissen, auf Tontafeln.

Obwohl die babylonischen Mathematiker imstande waren, sehr große Zahlen zu schreiben, fehlte ihnen doch die Vorstellung davon, daß es unendlich viele Zahlen gibt. Und auch das System der babylonischen Zahlenschrift war noch unvollkommen: Notwendig wäre es gewesen, unter Beibehaltung des Stellenwertsystems die Grundzahl „sechzig“ durch eine kleinere Zahl zu ersetzen, und den richtigen Gebrauch des Zeichens „Null“ zu erlernen. Dies blieb jedoch den Indern vorbehalten.

Bei den alten Griechen gelangte die Mathematik zu hoher Blüte. Die Griechen beherrschten das Rechnen mit ganzen und mit gebrochenen Zahlen. Archimedes, einer der größten griechischen Mathematiker, stellte ein Zahlensystem auf, das unendlich viele Zahlen enthielt und die Benennung jeder noch so großen Zahl ermöglichte.

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

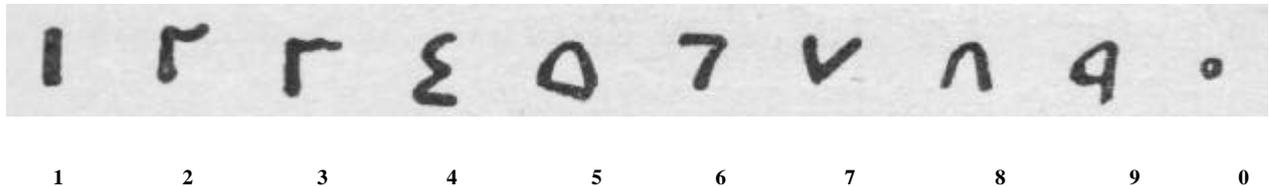
Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

Die griechische Kultur wurde zwar von den alten Römern übernommen und erhalten, doch als um 500 n. u. Z. das Römische Reich zerfiel - Europa wurde ständig von Kriegen überzogen, besonders schwer war der Druck der christlichen Kirchen, die in jener Zeit einen großen Einfluß erlangte, geriet auch die Kultur in Verfall. Viele Handwerke wurden nicht mehr ausgeübt, und die Erfolge der Wissenschaften gerieten in Vergessenheit. Im damaligen Europa genügte ein primitives Rechnen mit römischen Zahlen.

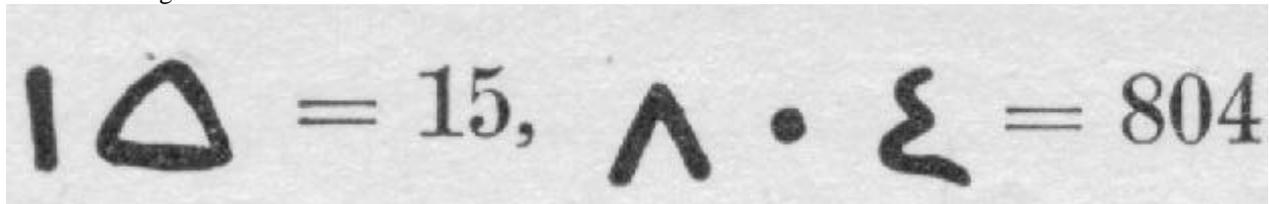
Im fernen Indien aber erlebten in diesem Zeitraum Wissenschaft und Kunst eine Blütezeit. Besonders geschätzt wurde die Mathematik, war es doch mit ihrer Hilfe möglich, den Kalender aufzustellen, den Beginn der Jahreszeiten festzulegen sowie Sonnen- und Mondfinsternisse vorauszubestimmen. Zum Schreiben großer Zahlen wurde ein Zahlensystem entwickelt, in dem das gewohnte Rechnen mit Zehnern mit dem babylonischen Stellenwertsystem vereinigt und das Zeichen „Null“ richtig angewandt war. Dieses System benutzen wir noch heute.

Auf welchem Wege kam nun dieses System aus Indien nach Europa?

Auf der Halbinsel Arabien - auf halbem Wege zwischen Europa und Indien - trugen sich im 7. Jahrhundert unserer Zeitrechnung große Ereignisse zu. Arabische Stämme, Bewohner dieser Halbinsel, eroberten eine Anzahl kleinerer benachbarter Staaten und bildeten einen einheitlichen Staat. Dieser arabische Staat dehnte sich aus und erreichte eine hohe Blüte, wobei er die Kultur des westlichen und östlichen Nachbarn übernahm. Von den Ägyptern das, was von der Kultur der alten Griechen übriggeblieben war, und von den Indern die Baukunst und die Mathematik. Und mit der Mathematik eigneten sich die Araber auch die Zahlzeichen der Inder an, die Ziffern, wie die Araber diese Zeichen dann nannten. Hier diese Zeichen in arabischer Form:



Diese Zeichen wurden genau so benutzt wie wir heute unsere Ziffern verwenden. Als Beispiel zwei Zahlen auf arabischer Art geschrieben:



Die Anordnung der Ziffern der Araber war also dieselbe wie bei uns.

Ihre Ziffern erhielten sich bis in die Gegenwart bei den Völkern arabischer Kultur: bei den Türken, Iranern und Afghanen.

Die Abbildung 4 zeigt moderne Briefmarken mit arabischen Ziffern. Bis zur Einführung eines nach dem Muster des russisch gestalteten Alphabets waren diese Ziffern auch bei einigen Völkern der Sowjetunion (bei den Tataren, den Aserbaidschanern, den Turkmenen und anderen) in Gebrauch. Die Marke am rechten Rand der Abbildung 4 ist ein Postwertzeichen der Aserbaidschanischen SSR aus dem Jahre 1922.

Es ist interessant, daß unsere jetzigen Ziffern gewöhnlich als „arabische“ bezeichnet werden, obwohl sie sich von diesen beträchtlich unterscheiden (außer der Eins und der Neun, die bei uns und den Arabern praktisch gleich sind). Richtiger wäre es, nicht nur von „arabischen Ziffern“, sondern von einem „arabischen Zahlensystem“ zu sprechen, und noch richtiger, von einem „indischen“ anstatt „arabischen“, weil die Inder es erfanden und die Araber lediglich die Verpflanzung nach Europa besorgten.

UNSER ZAHLENSYSTEM, SEINE VORZÜGE UND MÄNGEL

Wie ist denn nun unser Zahlensystem, das die Inder schufen, die Araber nach Europa brachten, das sich siegreich über die ganze Welt verbreitete und dabei alle anderen Systeme verdrängte? Was sind die Vorteile dieses Systems? Hat es keine Nachteile? Und wenn, wie sind diese zu beseitigen? Das sind die Fragen die uns nun beschäftigen sollen.

Unser System ist allen bekannt. Zum Schreiben von Zahlen benutzen wir zehn Zeichen (Ziffern). Neun von ihnen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9) stellen Zahlen dar. Das zehnte Zeichen - Null (0) - ist eigentlich keine Zahl. Es ist einfach nur ein Ausschluß, um es in der Schriftsetzersprache auszudrücken, Blindmaterial, mit dem beim Zahlenschreiben freie Stellen ausgefüllt werden.

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

Für noch größere Zahlen sind fast auf der ganzen Welt aus dem Lateinischen entnommene Namen üblich, die zwar gleichlautend sind, aber doch infolge der verschiedenen Systeme verschiedene bedeuten.

In der Sowjetunion folgt als fünfte Klasse die Trillion:

Trillion	1 000 000 000 000 dann
Quadrillion	1 000 000 000 000 000
Quintillion	1 000 000 000 000 000 000
Sestillion	1 000 000 000 000 000 000 000
Septillion	1 000 000 000 000 000 000 000 000 usf.

Anm. d. Ried.: In Deutschland folgt auf die Milliarde, die nur so und nicht etwa auch Billion genannt wird, erst die Billion, die dann der Trillion in der Sowjetunion entspricht. Also 1 Billion:

1 000 000 000 000

dann folgt 1000 Billionen, veraltet auch = 1 Billiarde

1 000 000 000 000 000

dann erst

Trillion 1 000 000 000 000 000 000

Trilliarde (veraltet)

1 000 000 000 000 000 000 000

Quadrillion 1 000 000 000 000 000 000 000 000

Quintillion 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000

usf.]

Auf diese Weise lesen wir die Zahl, die die Masse der Erdkugel in Tonnen ausdrückt: sechs Senrtrillionen Trilliarden] .

Der Abstand zwischen der Sonne und dem sonnennächsten Stern beträgt 40 300 000 000 000 Kilometer. Das wird gelesen: vierzig Trillionen dreihundert Billionen [vierzig Billionen dreihundert Milliarden] Kilometer.

Die Entfernung von uns zu jenen Nebelflecken, die in modernen Hochleistungsteleskopen noch eben zu erkennen sind, beträgt ungefähr 2 000 000 000 000 000 000 Kilometer, man liest das: zwei Sextillionen [Trilliarden] Kilometer.

Dieses System der Benennung ist wenig bequem, und wie wir sahen auch nicht eindeutig. Übrigens hatte die lateinische Sprache keine Namen für so große Zahlen; es wäre also erforderlich gewesen, solche Namen noch weiterhin auszudenken. Doch unnötig, hierüber nachzudenken, man hat eine andere Lösung gefunden.

WIE MAN „ASTRONOMISCHE“ ZAHLEN KURZ SCHREIBT UND BENENNT

Wahrscheinlich ist dem Leser dieser Schrift bei den riesigen („astronomischen“) Zahlen bereits aufgefallen: Es sind alles „runde“ Zahlen, denn sie enden mit einer großen Anzahl von Nullen. Sie sind aber weder besonders ausgewählt noch handelt es sich um ein zufälliges Zusammentreffen. Alle sehr großen Zahlen als Resultat einer Zählung oder Messung, erweisen sich unvermeidbar als runde Zahlen. Untersuchen wir, warum das so ist.

Wenn wir sagen: „An meiner Hand sind fünf Finger“, dann heißt das, daß es genau fünf, und nicht etwa drei oder sechs sind. Genauso verhält es sich, wenn irgend jemand sagt, daß in seinem Geburtsort siebenundvierzig Häuser stehen: Das stimmt, wenn er sich nicht verzählt hat, genau. Wenn wir aber beispielsweise sagen, die Stadt Schtscherbakow habe zum Zeitpunkt der Volkszählung von Jahre 1989 55500 Einwohner gehabt, so kommt hier den Worten „fünfundfünfzigtausendfünfhundert“ eine andere Bedeutung zu. Erstens sind im Laufe des Stichtages einige Menschen zugereist, andere wieder haben Schtscherbakow verlassen, und zum anderen - wie gewissenhaft die Zählung auch vorgenommen wurde - können manche Menschen zweimal, andere aber auch gar nicht erfaßt worden sein. Bei der Zählung der Bewohner einer Stadt dieser Größe hat eingehler von zwei bis drei Zehnern aber keine wesentliche Bedeutung. Deshalb bezeichnen die Nullen am Ende der Zahl 55 500 - der Einwohnerzahl der Stadt Schtscherbakow - nicht das Nichtvorhandensein von Zehnern und Einern, sondern nur unsere Unkenntnis über ihre Anzahl.

Ebenso ist die Zahl aller Bewohner unserer Erde, angegeben mit 2100000000, nicht genau. In den verschiedenen Staaten erfolgten die Volkszählungen zu verschiedenen Zeitpunkten, und es ist schwer, sie in Übereinstimmung zu bringen; es gibt aber auch Länder, deren Bevölkerung bisher noch gar nicht gezählt wurde. Darum ist es möglich, daß die Gesamtbevölkerung der Erde nicht 2100 000 000, sondern etwa 2 090 000 000 oder 2137000000 Menschen umfaßt. Von der Zahl, die die Bevölkerung des Erdballs angibt, kennen wir also genau nur die ersten Stellen. Wieviel Zehnmillionen und Millionen und erst recht wieviel Einheiten kleinerer Ordnung die Zahl

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

enthalten müßte - wissen wir nicht. Wieder zeigen die Nullen nicht das Fehlen, sondern unsere Unkenntnis über die Anzahl dieser Ordnungen an.

Dasselbe ergibt sich bei einer Zählung der Sterne am Himmel und sogar bei einer Zählung der Bäume eines Waldes. Jedes beliebige Zählen einer sehr großen Anzahl von Dingen erweist sich immer als angenähert.

Was für das Zählen gesagt wurde, das kann auch für das Messen und Wiegen wiederholt werden. Nehmen wir auf einer Dezimalwaage die Wägung einer Last von einigen Kilogramm vor, so ist ein Fehler von einigen Gramm fast unvermeidlich. Messen wir die Länge eines Zimmers, dann berücksichtigen wir die Meter, meistens noch die Zentimeter - den Millimetern aber schenken wir keine Beachtung. Jedes Meßgerät hat einen gewissen Empfindlichkeitsgrad; und man erhält als Resultat einer Messung immer nur einen angenäherten Wert der zu messenden Größe

In der Zahl 55 500 sehen wir die Zehntausender, die Tausender und die Hunderter als genau bekannt an. Diese Zahlen nennt man zum Unterschied von den Nullen am Zahlenende die sicheren Stellen der angenäherten Zahl. Die Zahl der Erdbewohner (2100 000 000) enthält nur zwei sichere Stellen.

Das heißt aber nicht, daß die Null keine sichere Stelle einnehmen kann. Als Beispiel einer sehr großen Zahl führten wir die Masse der Erdkugel mit 6 000 000 000 000 000 000 000 Tonnen an. Bei dieser Zahl verbürgen sich die Astronomen für die Richtigkeit der ersten beiden Stellen. Als sichere Stellen gelten hier also die Sechs und die erste Null. Die übrigen Nullen zeigen unsere Unkenntnis über die Anzahl der entsprechenden Ordnungen an; darüber, wie man beim Schreiben „sichere“ Nullen von „unsicheren“ unterscheidet, wird weiter unten berichtet.

Bei der Mehrzahl der technischen Messungen gelingt die Ermittlung von zwei oder drei sicheren Stellen; genauere Messungen liefern vier oder fünf, und nur die genauesten physikalischen Messungen ergeben sechs oder sieben, sehr selten acht sichere Stellen.

Welche Folgerungen kann man hieraus ziehen? Nur die, daß bei allen Zahlen, die in Wissenschaft und der Praxis vorkommen können, die ersten zwei bis fünf Stellen (selten nur mehr) sichere sind, und die restlichen am Zahlenende Nullen sein müssen.

Alle Zahlen aber, die mit Nullen enden, kann man in Form eines Produktes aus einer kleinen Zahl und einer „Einheit mit Nullen“ darstellen. Die Zahl 509 000 000 z. B. (die Oberfläche der Erdkugel in Quadratkilometern) kann man so schreiben:

$$509 \times 1\,000\,000.$$

Die Zahl, die die Masse der Erde in Tonnen angibt, sieht damit so aus: $60 \times 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$; hier bleibt neben der Sechs eine Null stehen, die, wie bereits erwähnt, eine sichere Stelle einnimmt, während der andere Faktor alle „zweifelhaften“ Nullen enthält.

Bei einer derartigen Schreibweise wird der erste Faktor gewöhnlich zwei oder drei, seltener vier oder fünf, und nur in Ausnahmefällen sechs, sieben oder acht Stellen haben. Eine solche Zahl ist leicht zu schreiben und zu lesen. Es gilt also nur noch, eine Methode zu finden, um jene Zahlen, die den zweiten Faktor darstellen - d. h. jene Zahlen, die die Form der „Einheit mit Nullen“ haben - , kurz schreiben und lesen zu können.

Zur abgekürzten Schreibweise solcher Zahlen bedient man sich eines Zeichens, das man „Exponent“ oder „Hochzahl“ nennt. Was ist das für ein Symbol?

Um zu ihm zu gelangen, sehen wir uns die Multiplikation zweier und mehrerer gleicher Zahlen miteinander an.

Das Produkt zweier gleicher Faktoren - mit anderen Worten das Ergebnis der Multiplikation einer Zahl mit sich selbst - heißt die zweite Potenz oder das Quadrat dieser Zahl. Beispielsweise ist 64 das Produkt aus 8 mal 8, und man nennt deshalb die Zahl 64 das Quadrat oder die zweite Potenz von 8; 100 ist das Produkt von 10×10 , folglich ist die Zahl 100 das Quadrat der Zahl 10, Die Bezeichnung „Quadrat“ für das Produkt zweier gleicher Faktoren wurde deshalb gewählt, weil der Inhalt einer quadratischen Fläche sich durch Multiplikation der Seitenlänge mit sich selbst ergibt (Abbildung 5).

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

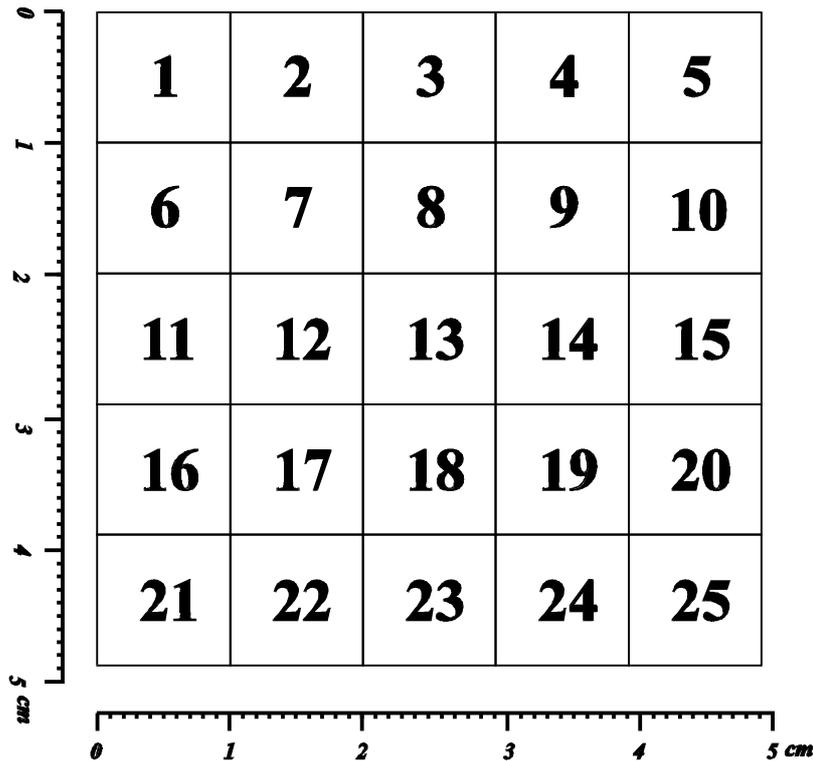


Abbildung 5. Ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 5 Einheiten enthält $5 \times 5 = 25$ Quadratinheiten

Das Produkt aus drei gleichen Faktoren heißt die dritte Potenz oder der Kubus der gegebenen Zahl. Beispielsweise ist 1000 die dritte Potenz von 10, weil $10 \times 10 \times 10 = 1000$ ist.

Anstatt 10×10 kann man aber auch 10^2 schreiben: Die kleine Zwei, rechts von der Zehn und etwas erhöht geschrieben, zeigt, daß zehn sich zweimal als Faktor wiederholt. Ebenso ist das Produkt $10 \times 10 \times 10$ kürzer darstellbar als: 10^3 ; die kleine Drei, rechts und höher als die Zehn geschrieben, gibt an, daß zehn sich dreimal als Faktor wiederholt.

Jede Zahl, also auch 10, kann als Faktor nicht nur zwei- oder dreimal, sondern beliebig oft auftreten. Die Zahl 10 000 ist beispielsweise $10 \times 10 \times 10 \times 10$: Hier sind vier gleiche Faktoren. Ihr Produkt heißt die vierte Potenz von 10 und wird abgekürzt geschrieben: 10^4 .

In dieser Weise verfährt man auch weiter. Das Produkt einiger gleicher Faktoren, d. h. das Ergebnis der Multiplikation einer Zahl einige Male mit sich selbst ergibt eine Potenz dieser Zahl; die Zahl selbst ist die Grundzahl der Potenz 2 und jene Zahl, die anzeigt, wie oft sich die Grundzahl als Faktor wiederholt, ist der Exponent oder die Hochzahl. In unserem Beispiel, $10^4=10000$, ist die Zahl 10 die Grundzahl, die Zahl 4 die Hochzahl, und die Zahl 10 000 die Potenz. Die Hochzahl wird immer in kleinerer Schrift rechts neben der Grundzahl und gegen diese erhöht angegeben.

Beliebige Potenzen von 10 sind sehr leicht zu berechnen, weil jette Multiplikation mit 10 einfach durch Hinzuschreiben einer Null durchgeführt werden kann.

Hier die ersten fünf Potenzen von 10:

$$\begin{aligned} 10 &= 10^1 \text{ (10 - ein Faktor)} \\ 100 &= 10^2 \text{ (10} \times \text{10 - zwei gleiche Faktoren)} \\ 1000 &= 10^3 \text{ (10} \times \text{10} \times \text{10 - drei gleiche Faktoren)} \\ 10000 &= 10^4 \text{ (10} \times \text{10} \times \text{10} \times \text{10 - vier gleiche Faktoren)} \\ 100000 &= 10^5 \text{ (10} \times \text{10} \times \text{10} \times \text{10} \times \text{10 - fünf gleiche Faktoren).} \end{aligned}$$

Es kann also jede beliebige Potenz von zehn in Form einer „Einheit mit Nullen“ geschrieben werden, wobei die Anzahl der Nullen immer gleich der Hochzahl ist.

Ist umgekehrt eine Zahl in Form einer „Einheit mit Nullen“ gegeben, dann ist es möglich, sie sofort in Form einer Zehner-Potenz zu schreiben: dazu genügt die Zählung der Nullen. Zum Beispiel: $1000000=10^6$ (6 Nullen), $10000000000 = 10^{10}$ (10 Nullen).

So kann man jede beliebige „astronomische“ Zahl in einfacher Art kurz schreiben, wobei man dabei ihre sicheren Stellen absondert.

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

Die Oberfläche der Erdkugel beträgt 509×10^6 Quadratkilometer, der Abstand zwischen Erde und Sonne 1495×10^5 Kilometer, der Abstand der Sonne von dem ihr nächstgelegenen Stern 403×10^{11} Kilometer. Die Masse der Erdkugel ist 60×10^{20} Tonnen (man schreibt 60×10^2 und nicht 6×10^{21} weil die erste Null hinter der Sechsen durch die Astronomen verbürgt ist: Als sichere Stelle gehört sie in den ersten Faktor).

Häufig verwendet man anstatt des Malzeichens - des schrägen Kreuzes (\times) den Punkt (\cdot); damit erhalten die angeführten Zahlen folgendes Aussehen:

$$509 \cdot 10^6, 1495 \cdot 10^5, 403 \cdot 10^{11} \text{ und } 60 \cdot 10^{20}.$$

Gelesen werden diese Zahlen also: $509 \cdot 10^6$ - „fünfhundertneun mal zehn hoch sechs“ (oder umständlicher: „fünfhundertneun mal zehn in der Sechsten Potenz“), $1495 \cdot 10^5$ - „eintausendvierhundertundfünfzig mal zehn hoch fünf“, usw.

Durch die Einführung der Hochzahl, man sagt auch der Potenzschreibweise, kann man also beliebige Zahlen, wie groß sie auch sein mögen, kurz schreiben und lesen.

Wir wollen nun mit Hilfe der Potenzschreibweise veranschaulichen, bis zu welchen Zahlen unsere Vorfahren jeweils vorgedrungen waren:

Die Höhlenmenschen zählten bis 2.

Die Menschen ausgangs der Steinzeit zählten bis 10^2 - 10^3 .

Die alten Ägypter, die alten Griechen und die Slawen bis zur Erfindung der Schrift kannten Zahlen bis 10^4 .

Die größte Zahl, die die Forscher in den Kulturdokumenten Babylons fanden, war $1\,959\,552 \cdot 10^8$.

Indische Kulturdokumente von vor dreitausend Jahren nennen Zahlen bis zu 10^5 , und vor zweitausend Jahren kannten die Inder Zahlen bis 10^{17} .

„Die große slowenische Zahl“, von der wir auf Seite 19 sprachen, ergab viel größere Zahlen: Legion = 10^2 , Leodr = 10^{24} , Woron = 10^{48} und Koloda = 10^{49} .

WIE MAN "ZAHLENZWERGE" SCHREIBT UND BENENNT

Die Wissenschaft, die uns mit riesigen, astronomischen Zahlen bekannt machte, liefert uns auch Beispiele von „Zahlenzwerge“. Diese Zahlen, die allergeringsten, verschwindend kleinen Mengen ausdrücken, stellen sich als Brüche mit sehr großen Nennern dar. Die Zähler aber sind nicht sehr groß; sie enthalten gewöhnlich zwei oder drei, selten vier oder fünf Stellen. Nur in besonderen Ausnahmefällen trifft man im Zähler sechs sieben oder acht Stellen an. Höhere Genauigkeiten hat die Wissenschaft bis jetzt nicht erreicht. Untersuchen wir einige Beispiele. Unser Blut besteht aus Milliarden kleinster Teilchen. Die wichtigsten von ihnen, die dem Blut die rote Farbe verleihen, heißen danach auch die roten Blutkörperchen. Den Gelehrten gelang es, diese Teilchen im Mikroskop zu beobachten und ihre ungefähren Dimensionen festzustellen. Es zeigte sich, daß ein rotes Blutkörperchen einen Durchmesser von etwa $7/10000$ oder $0,0007$ cm hat.

Noch kleiner sind die Moleküle, die Atome und die Elektronen. Das Gewicht des leichtesten der Atome, des Wasserstoffatoms, beträgt nur

165

100 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Bei diesen Brüchen ist der Zähler nicht groß, das Schreiben der Zahl aber dennoch umständlich, weil der Nenner so groß ist.

Um nun solche Brüche kürzer zu schreiben und einfacher lesen zu können, benutzt man - genau wie bei sehr großen Zahlen - das Zeichen der Hochzahl. Die als Beispiel angeführten Brüche kann man so schreiben:

$$\frac{7}{10000} = \frac{7}{10^4}$$

Es ist aber möglich, solche Brüche noch einfacher darzustellen. Man kann nämlich anstatt als Nenner diese Zehnerpotenz auch als Faktor schreiben, wobei der Exponent aber mit einem Minuszeichen versehen sein muß.

Daher kann man für den Bruch $\frac{7}{10^4}$ eleganter setzen: $7 \cdot 10^{-4}$, und lesen: „siebenmal zehn hoch minus vier“.

Nach dieser Methode ist $10^{-1} = \frac{1}{10}$ (ein Zehntel), $10^{-2} = \frac{1}{100}$ (Hundertstel), 10^{-3} ein Tausendstel.

Jeden Dezimalbruch kann man in dieser abgekürzten Form schreiben. Versuchen es beispielsweise bei dem Bruch $0,000183$. Wir verwandeln dazu in einen gewöhnlichen Bruch, stellen hierauf den Nenner in abgekürzter

Zur Geschichte der Zahlendarstellung

Datei: Zahlen.doc (Erstelldatum: 29.12.95 13:40 Uhr Letzte Aktualisierung: 24.06.97 17:43)

Form als Zehnerpotenz dar und verwandeln schließlich diese Potenz in einen Faktor, indem wir die Hochzahl mit dem Minuszeichen versehen:

$$0,000183 = \frac{183}{1\,000\,000} = \frac{183}{10^6} = 183 \cdot 10^{-6}$$

Untersuchen wir noch den umgekehrten Fall: Die Zahl $27 \cdot 10^{-9}$ sei in gewöhnlicher Art, in Form eines gemeinen Bruches zu schreiben. Das geschieht so:

$$27 \cdot 10^{-9} = \frac{27}{10^9} = \frac{27}{1\,000\,000\,000}$$

diese Zahl ist in dieser Form zwar noch leicht zu lesen, in der Praxis aber sagt man immer: „siebenundzwanzig mal zehn hoch minus neun“.

Auf diese Weise werden also auch Brüche ebenso einfach geschrieben wie ganze Zahlen.

SCHLUSSWORT

Im Laufe ihrer Entwicklung lernte die Menschheit, ausgehend von kleinen, mit immer größeren Zahlen rechnen, wobei sich die Schreibweise und die Regeln vervollkommneten. Neben den ganzen Zahlen wurden andere Arten von Zahlen erfunden, um Größen ausdrücken zu können, auf die der Mensch im Leben stieß. So wurden die gebrochenen Zahlen, die negativen und später die sogenannten irrationalen Zahlen eingeführt. Die moderne Wissenschaft schuf „komplexe Zahlen“, „Quaternionen“, „Vektoren“, „Tensoren“. In dieser Schrift über diese Entwicklung zu berichten, ist natürlich nicht möglich, umfangreicheren Werken muß das vorbehalten bleiben.

Aber auch das wollen wir nicht vergessen, die Mathematik entwickelt sich weiter wie jede andere Wissenschaft. Es vervollkommen sich die Methoden, und man benötigt immer neue Arten von Zahlen.