MaMaEuSch

Management **Ma**thematics for **Eu**ropean **Sch**ools
http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/

Einfache Anwendungen der Matrizenrechnung

Markus Buchtele[1]

Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr. Franz Rendl[2]

Dieses Projekt wurde veröffentlicht mit Unterstützung durch die EU mittels einer teilweisen Förderung im Rahmen des Sokrates Programms.

[1] Projektassistent am Institut für Mathematik der Universität in Klagenfurt
[2] Institut für Mathematik der Universität in Klagenfurt

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In der Wirtschaft treten häufig Fragestellungen auf, in denen gewisse Kosten, bzw. eine Anzahl von Produkten miteinander verglichen bzw. berechnet werden. Man könnte nun diese Angaben immer in Tabellen (be)schreiben. Um aber die gewünschten Ergebnisse einfacher, übersichtlicher und schneller zu bekommen kann man diese Angaben auch in einer rechteckigen Anordnung von Zahlen, ab nun Matrix genannt, darstellen.

Statt zum Beispiel einen Verbrauch einer Firma (in unsrem Beispiel eine Bierfabrik) an Rohstoffen in Tabellenform zu schreiben,

	Hopfen	Malz	Wasser
1. Woche	8	4	12
2. Woche	10	6	5
3. Woche	7	8	5
4. Woche	11	7	9

könnte man auch vereinfacht so schreiben:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Viele Zusammenhänge in der Wirtschaft sind „*proportional*“, dabei bedeutet „proportional“, dass einem k-fachen Wert einer Variablen x (z.B. Menge) der k-fache Wert einer davon abhängigen Variablen y (z.B. Preis) entspricht. Wenn eine Mengeneinheit (ME) Hopfen € 8,-- kostet, dann müssen 2 ME € 16,-- kosten.
Für diese Berechnungen benötigt man nur Summen und Produkte von Matrizen. Deswegen ist der Einsatz in der Schule trotz des fortgeschrittenen Niveaus durchführbar und auch sinnvoll. Das Rechnen mit Matrizen wird daher so definiert, dass „lineare“ Zusammenhänge einfach und übersichtlich dargestellt werden können.

Dadurch treten jedoch einige Unterschiede zum Rechnen mit reellen Zahlen auf, auf die wir auch im Besonderen eingehen wollen.

Nimmt dieses Thema überhaupt einen Platz in den Schulen ein? Dafür ist es notwendig, den Lehrplan zu betrachten.
Im Lehrplan der Österreichischen Oberstufe findet man im Kapitel „Grundlegende Kenntnisse“ der 6. Klasse folgenden Paragraph:

Lineare Algebra und lineare analytische Geometrie[3]

Fähigkeiten im Arbeiten mit Vektoren und linearen Gleichungen mit drei Unbekannten sollen Voraussetzungen für die Behandlung von geometrischen Problemen im Raum sein. Dabei bestehen vielfältige Möglichkeiten für produktives Arbeiten und zur Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens. Matrizen sind - so wie Vektoren - ein Mittel, um komplexere Rechenstrukturen, Begriffe und Beziehungen einfach darzustellen; ein Vorteil dieser Darstellung liegt auch darin, dass mit Matrizen weitgehend wie mit reellen Zahlen gerechnet werden kann.

Weiters findet man unter dem Kapitel der 6. Klasse „Vertiefte Kenntnisse, Reflektieren über Mathematik“ folgendes:

Matrizen, Rechnen mit Matrizen:

Angeben von Sachverhalten, die durch Matrizen beschreibbar sind. Addieren von Matrizen, Multiplizieren mit einer reellen Zahl, Multiplizieren mit einem Vektor, Multiplizieren zweier Matrizen. Anwenden dieser Rechenoperationen in inner- und außermathematischen Bereichen. Untersuchen der Gültigkeit von Rechengesetzen.

Worin besteht jetzt der Bezug zur Wirtschaft bei diesem Thema? Wie wir schon im einführenden Beispiel ersehen können, werden einfache Produktionsprozesse und

[3] siehe http://www.bmbwk.gv.at/medien/7045_MATHEMATIK_Oberstufe.pdf

–abläufe durch Matrizen dargestellt. Deswegen ist es der Wunsch der Wirtschaft an die Schule, durch das Erarbeiten der Matrixrechnung anhand einfacher Wirtschaftsbeispielen erste Einblicke in Arbeitswelt zu vermitteln. Das MaMaEuSch – Team hat sich zur Aufgabe gemacht in diesen Bereichen die LehrerInnen zu unterstützen und ihnen Hilfestellungen anzubieten.

Heute dient die Matrizenrechnung nicht nur als Hilfsmittel für betriebswirtschaftliche Rechnungen, sondern ist auch in der Statistik, in der Physik und in vielen anderen Disziplinen ein unentbehrliches Hilfsmittel, das dank des Einsatzes von Computern immer leichter eingesetzt werden kann.

2. Einführung der Matrizenrechnung

2.1. Einstieg in das Thema:

Zwei Betriebe Hirter und Zipfer haben in den 4 Wochen eines Monats folgenden Verbrauch an Rohstoffen Hopfen, Malz und Wasser (Angaben in Mengeneinheiten ME):

1. **Woche:**

Hirter: 8 ME Hopfen, 4 ME Malz, 12 ME Wasser
Zipfer: 6 ME Hopfen, 3 ME Malz, 12 ME Wasser.

2. **Woche:**

Hirter: 10 ME Hopfen, 6 ME Malz, 5 ME Wasser
Zipfer: 9 ME Hopfen, 5 ME Malz, 4 ME Wasser.

3. **Woche:**

Hirter: 7 ME Hopfen, 8 ME Malz, 5 ME Wasser
Zipfer: 7 ME Hopfen, 0 ME Malz, 5 ME Wasser.

4. **Woche:**

Hirter: 11 ME Hopfen, 7 ME Malz, 9 ME Wasser
Zipfer: 11 ME Hopfen, 6 ME Malz, 5 ME Wasser.

2.2. Übersichtliche Darstellung:

Diese Angaben kann man übersichtlicher in Tabellenform darstellen.

		Hopfen	Malz	Wasser
	1. Woche	8	4	12
Hirter	2. Woche	10	6	5
	3. Woche	7	8	5
	4. Woche	11	7	9

Oder kürzer:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Verbrauchsmatrix für die Firma Hirter

		Hopfen	Malz	Wasser
	1. Woche	6	3	12
Zipfer	2. Woche	9	5	4
	3. Woche	7	0	5
	4. Woche	11	6	5

Oder kürzer:

$$Z = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Verbrauchsmatrix für die Firma Zipfer

2.3. Definition einer Matrix:

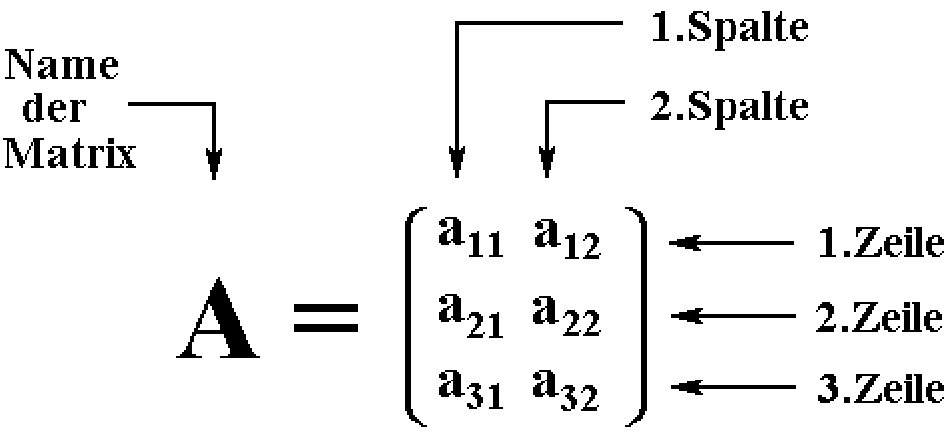
Eine Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema.
Die Matrix (Mehrzahl: Matrizen) besteht aus waagerecht verlaufenden Zeilen und senkrecht verlaufenden Spalten.

Die „waagrechten Eintragungen“ oder auch **Zeilen**eintragungen genannt geben die Werte der verbrauchten Rohstoffe Hopfen, Malz und Wasser in der entsprechenden Woche an: □ Zeilen = Wochen.

Die „senkrechten Eintragungen“ oder auch **Spalten**eintragungen genannt geben die Werte des entsprechenden Rohstoffes in den einzelnen Wochen an:
□ Spalten = Rohstoffe.

$$Wochen \rightarrow \begin{pmatrix} & Rohstoffe & \\ \ldots & . & \ldots \\ & & \end{pmatrix}$$

Generell wird zuerst die Zeilennummer und dann die Spaltennummer genannt:
z.B.: Im Schnittpunkt der 3. Zeile und der 2. Spalte in H (Hirter-Matrix) steht somit der Verbrauch des Rohstoffes Malz in der 3. Woche.
Man schreibt: $h_{32} = 8$ □ Von der Hirter-Matrix H: Zeilenindex = 3, Spaltenindex =2



2.3.1. *Konvention:*

- Eine Matrix wird in **runde** Klammern geschrieben.
- Eine Matrix wird mit einem **großen Buchstaben** bezeichnet, deren Elemente mit **kleinen Buchstaben**.

2.3.2. *Typ einer Matrix:*

Weiters vereinfacht man die Erläuterung der Größe einer Matrix dadurch, dass man die Anzahl der Zeilen und der Spalten als Information angibt.
In unserem Beispiel ist deswegen die Zipfer-Matrix Z

$$Z = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

eine 4x3 Matrix. (4 Zeilen und 3 Spalten).
Selbstverständlich auch die Hirter-Matrix H, da es gleich viele Rohstoffe (3) gibt, und der gleiche Zeitraum (4 Wochen) betrachtet wird.

2.4. Vergleich der Verbrauchswerte:

Die Matrixschreibweise der beiden Betriebe Hirter und Zipfer gestattet einen leichteren Vergleich der beiden Betriebe als die Textdarstellung.

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Nun kann man direkt und einfach die verschieden Einträge miteinander vergleichen. Will man nun Informationen zwischen den beiden Bertieben bekommen oder aber Informationen von beiden Betrieben zusammen, bedarf es Additions-, Subtraktionsregeln:

2.5. Rechenoperationen mit Matrizen:

Hinweis:

Diese Art der Addition und Subtraktion von Matrizen, wie sie hier vorgestellt wird, ist nur für gleich große Matrizen möglich, also solche, die dieselben Zeilen- und Spaltenanzahl besitzen.

2.5.1. Addition:

Wie groß ist der Verbrauch an Rohstoffen für beide Betriebe in den einzelnen Wochen?

Wenn man nun die erste Woche betrachtet, dann benötigt die Firma Hirter 8 ME und die Firma Zipfer 6 ME, d.h.:
8+6 =14 ME Hopfen,
das gleiche gilt für Malz:4+3=7 ME Malz,
und Wasser:12+12=24 ME Wasser.

Übersichtlicher, kürzer und damit Platz sparender ist das addieren, wenn man die Tabellen in ein rechteckiges Zahlenschema anschreibt. So werden die entsprechenden Elemente in den Matrizen Hirter und Zipfer, also die mit dem gleichen Zeilen- und Spaltenindex, zusammengezählt:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 24 \\ 19 & 11 & 9 \\ 14 & 8 & 10 \\ 22 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Verbrauchs-matrix für die Firma Hirter	Verbrauchs-matrix für die Firma Zipfer	Verbrauchs-matrix für beide Firmen zusammen

2.5.2. *Subtraktion:*

Wie groß ist der Unterschied im Verbrauch der beiden Betriebe in den einzelnen Wochen?

Wenn man nun die erste Woche betrachtet, dann benötigt die Firma Hirter 8 ME und die Firma Zipfer 6 ME, d.h. die Differenz beträgt 2 ME:
8-6 =2 ME Hopfen,
das gleiche gilt für Malz:4-3=1 ME Malz,
und Wasser:12-12=0 ME Wasser.

Übersichtlicher, kürzer und damit Platz sparender ist das subtrahieren, wenn man die Tabellen in ein rechteckiges Zahlenschema anschreibt. So werden die entsprechenden Elemente in den Matrizen Hirter und Zipfer, also die mit dem gleichen Zeilen- und Spaltenindex, subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aus dem Ergebnis sehen wir, dass die Firma Zipfer nie mehr Rohstoffe benötigt, wie die Firma Hirter. In der Ergebnismatrix findet man 4 Eintragungen mit dem Wert Null. Dies zeigt uns, dass beide Firmen 4 Mal denselben Rohstoffbedarf aufweisen. Natürlich könnte auch ein Minuswert bei Eintragungen herauskommen, das würde in unserem Beispiel nur bedeuten, das die Firma Zipfer mehr Rohstoffe (bei einer Eintragung oder mehrere) benötigt als die Firma Hirter.

2.5.3. *Multiplikation mit einem Skalar:*

Wie groß ist der Verbrauch an Rohstoffen in den einzelnen Wochen für 5 solche Betriebe wie Hirter, wenn man annimmt, dass diese „gleich" viel wie Hirter verbrauchen?

Dazu müssen wir jede Eintragung in der Hirter-Matrix H mit 5 multiplizieren.
Man schreibt.

$$5 * \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 \\ 50 & 30 & 25 \\ 35 & 40 & 25 \\ 55 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

Das gleiche Ergebnis würde man bekommen, wenn man sich fragt, wie hoch der Verbrauch in 5 Monaten ist, unter der Annahme, dass in den einzelnen Monaten immer gleich viel verbraucht wird.

$$5 * \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 \\ 50 & 30 & 25 \\ 35 & 40 & 25 \\ 55 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

Solche Annahmen von konstantem Verbrauch sind sehr beliebt. Erst sie ermöglichen das Vereinfachen, weil sie **Proportionalitätsannahmen**[4] sind, d.h. das sich beim Vervielfachen alles ganz linear entwickelt.

[4] siehe auch Kapitel 1

2.5.4. *Multiplikation von 2 Matrizen:*

Nehmen wir nun an, dass der Betrieb Hirter die Rohstoffe von zwei Lieferanten (Hopfen AG und Malz und co.) beziehen kann. Welcher der beiden ist günstiger für die Firma? Zu erwähnen ist noch, dass man die Lieferanten nur Wochenweise tauschen kann.

	Hopfen AG	Malz und co.
Hopfen	50	55
Malz	136	127
Wasser	80	79

Sinnvoller Weise nennt man diese Matrix mit den Eintragungen der Preise der Rohstoffe: *Preismatrix P.*

$$P = \begin{pmatrix} 50 & 55 \\ 136 & 127 \\ 80 & 79 \end{pmatrix}$$

Auf den ersten Blick kann man nicht erkennen, welcher Lieferant billiger ist.
Nur durch das genaue ausrechnen bekommen wir das exakte Ergebnis.
Durch die Proportionalitätsannahme folgt:

Kosten bei der Firma Hopfen AG:

1. Woche: 8*50+4*136+12*80 =1904
2. Woche: 10*50+6*136+5*80 =1716
3. Woche: 7*50+8*136+5*80 =1838
4. Woche: 11*50+7*136+9*80 =2222

Kosten bei der Firma Malz und co.:

1. Woche: 8*55+4*127+12*79 =1896
2. Woche: 10*55+6*127+5*79 =1707
3. Woche: 7*55+8*127+5*79 =1542
4. Woche: 11*55+7*127+9*79 =2205

Zusammengefasst ergeben sich folgende Kosten:

	Hopfen AG	Malz und co.
1. Woche	1904	1896
2. Woche	1716	1707
3. Woche	1838	1542
4. Woche	2222	2205

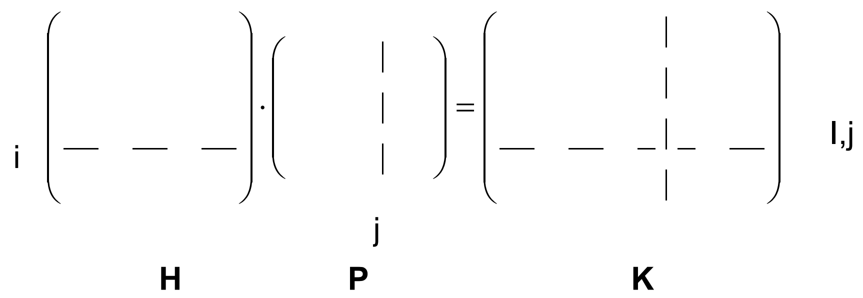
Sinnvoller Weise nennt man diese Matrix mit den Eintragungen der Kosten der Lieferanten: *Kostenmatrix K.*

$$K = \begin{pmatrix} 1904 & 1896 \\ 1716 & 1707 \\ 1838 & 1542 \\ 2222 & 2205 \end{pmatrix}$$

Man bemerkt folgende Regel für die Eintragungen in K:

k_{11} =1904= Die 1. Zeile von der Hirter-Matrix H (8,4,12) wurde Elementweise mit der 1. Spalte von Preismatrix P (50,136,80) multipliziert, (d.h., erste mit erster: 8*50, zweite mit zweiter: 4*136 und dritte mit dritter Zahl: 12*80) und dann aufsummiert.

Man sagt: Die Kostenmatrix K entsteht aus H (Hirter-Matrix) und P (Preismatrix) durch **Multiplikation**:



Diese Art der Multiplikation tritt häufig auf. Charakteristisch für diese Situation ist, dass eine **Summe von Produkten mit wiederkehrenden ersten bzw. zweiten Faktor** vorliegt. In unserem Fall: 50,136, und 80, bzw. 55, 127 und 79.

$$K = \begin{pmatrix} 8*50+4*136+12*80 & 8*55+4*127+12*79 \\ 10*50+6*136+5*80 & 10*55+6*127+5*79 \\ 7*50+8*136+5*80 & 7*55+8*127+5*79 \\ 11*50+7*136+9*80 & 11*55+7*127+9*79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 & 55 \\ 136 & 127 \\ 80 & 79 \end{pmatrix} = H * P$$

Wichtig:

Diese Art der **Multiplikation** ist nur dann möglich, wenn die Spaltenanzahl (In unserem Beispiel 3) der ersten Matrix gleich der Zeilenanzahl (In unserem Beispiel auch 3) der zweiten Matrix ist.

Die Ergebnismatrix hat stets folgendes Aussehen:

(4x**3** Matrix) * (**3**x2 Matrix) = 4 x 2 Matrix

z.B.:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 & 55 \\ 136 & 127 \\ 80 & 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1904 & 1896 \\ 1716 & 1707 \\ 1838 & 1542 \\ 2222 & 2205 \end{pmatrix}$$

An diesem Beispiel sehen wir aber auch sehr schön, dass man diese beiden Matrizen nicht umgekehrt multiplizieren kann.

(3x**2** Matrix) * (**4**x3 Matrix) …**geht nicht, da 4 ungleich 2 ist!!!**

3. Beispiele

3.1. Multiplikation mit einem Skalar:

5 Studenten bekommen pro Monat folgenden Summen an Kinderbeihilfe und Stipendium:

Namen	Kinderbeihilfe in € / Monat	Stipendium in € / Monat
Maier	200	423
Huber	168	378
Pölzl	193	564
Belzik	125	188
Durchschlag	219	297

a.) Berechne die Summe an Kinderbeihilfe und Stipendium, welche die Studenten im Jahr bekommen.

b.) Welcher Student bekommt gesamt am meistens Unterstützung?

a.) $$12 * \begin{pmatrix} 200 & 423 \\ 168 & 378 \\ 193 & 564 \\ 125 & 188 \\ 219 & 297 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 & 5076 \\ 2016 & 4536 \\ 1500 & 6768 \\ 2316 & 2256 \\ 2628 & 3564 \end{pmatrix}$$

b.) $$G = \begin{pmatrix} 7476 \\ 6552 \\ 7268 \\ 4572 \\ 6192 \end{pmatrix}$$

Der Student Maier bekommt mit € 7476,-- am meisten Unterstützung.

3.2. Multiplikation von zwei Matrizen:

Die VÖST Alpine in Linz möchte Stahl herstellen. Neben anderen Rohstoffen werden Eisenerz und Steinkohle benötigt. Der Bedarf dieser Mengen (in Tonnen) innerhalb von 3 Wochen wird in der Tabelle aufgeschlüsselt.

	Eisenerz	**Steinkohle**
1. Woche	9t	8t
2. Woche	5t	7t
3. Woche	6t	4t

Drei verschieden Lieferanten können die Rohstoffe liefern. Welcher ist der kostengünstigste?

Die Kosten der Lieferanten pro Tonne sind wie folgt:

	Ruhr AG	*Eisenerz AG*	*Steinkohle und co.*
Eisenerz	*540*	*630*	*530*
Steinkohle	*420*	*410*	*440*

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 540 & 630 & 530 \\ 420 & 410 & 440 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8220 & 8950 & 8290 \\ 5640 & 6020 & 5730 \\ 4920 & 5420 & 4940 \end{pmatrix}$$

Die Summen lauten:

	Summen
Ruhr AG	18780
Eisenerz AG	20390
Steinkohle und co.	18960

Das bedeutet, die Firma Ruhr AG ist der billigste Lieferant!